अनुक्रमांक

मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 8

नाम ....

131

324 (EZ)

2024

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] *[पूर्णांक : 100*

निर्देश :

(i) प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।

*(ii) इस प्रश्न-पत्र में कुल **नौ** प्रश्न हैं ।*

*(iii) **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(iv) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः उल्लेख किया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं ।

(v) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं ।

(vi) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अंत तक करते जाइए ।

(vii) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए ।

1. ***सभी*** खण्ड कीजिए । प्रत्येक खण्ड का सही विकल्प चुनकर उसे अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए ।

(क) वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में $R = \{(a, b) : a \leq b^2\}$ द्वारा परिभाषित सम्बन्ध है : *1*

(i) स्वतुल्य और सममित नहीं, किन्तु संक्रामक

(ii) स्वतुल्य और संक्रामक नहीं, किन्तु सममित

(iii) सममित और संक्रामक नहीं, किन्तु स्वतुल्य

(iv) न स्वतुल्य, न सममित और न ही संक्रामक

(ख) यदि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, तो A से B तक फलनों की संख्या होगी : *1*

(i) 6 (ii) 8

(iii) 9 (iv) 5

(ग) λ के किस मान के लिए सदिश $\lambda \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ और सदिश $\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ लम्बवत् हैं ? *1*

(i) -2 (ii) 2

(iii) 3 (iv) 4

(घ) समाकलन $\int x e^{-x} \, dx$ का मान है : *1*

(i) $-(x+1)e^{-x}$ (ii) $(x+1)e^{-x}$

(iii) $(x-1)e^{-x}$ (iv) $-(x-1)e^{-x}$

(ङ) अवकल समीकरण $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 8y = \log x$ की कोटि है : *1*

(i) 2 (ii) 3

(iii) 5 (iv) 6

2. ***सभी*** खण्ड कीजिए :

(क) $\operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए । *1*

(ख) $\cos(\sin x^2)$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए । *1*

(ग) हल कीजिए : $\frac{dy}{dx} = -4xy^2$. *1*

(घ) x के सापेक्ष $\log_e x$ का समाकलन कीजिए । *1*

(ङ) यदि $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ और $P(A|B) = \frac{3}{10}$, तो $P(A \cup B)$ ज्ञात कीजिए । *1*

3. ***सभी*** खण्ड कीजिए :

(क) आव्यूह AB ज्ञात कीजिए यदि $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$. *2*

(ख) क्या $f(x) = \begin{cases} x+5, & \text{यदि } x \le 1 \\ x-5, & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 1$ पर सतत है ? *2*

(ग) $\int \frac{1}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए । 2

(घ) उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ सदिशों $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ द्वारा निरूपित हैं । 2

4. ***सभी*** खण्ड कीजिए :

(क) $N \times N$ में एक सम्बन्ध R निम्नवत् परिभाषित है :

$(a, b)\, R\, (c, d)$ यदि और केवल यदि $ad = bc$. सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता सम्बन्ध है । 2

(ख) 'a' का वह न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए अन्तराल [1, 2] में फलन $f(x) = x^2 + ax + 1$ से प्रदत्त फलन वर्धमान है । 2

(ग) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y = 1\ (y \neq 1)$ को हल कीजिए । 2

(घ) एक पासे को एक बार उछाला जाता है । यदि घटना 'पासे पर प्राप्त संख्या 3 का अपवर्त्य है' को E से और 'पासे पर प्राप्त संख्या सम है' को F से निरूपित किया जाए, तो बताएँ कि क्या घटनाएँ E और F स्वतन्त्र हैं । 2

5. ***सभी*** खण्ड कीजिए :

(क) यदि x, y, z विभिन्न हों और $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3+1 \\ y & y^2 & y^3+1 \\ z & z^2 & z^3+1 \end{vmatrix} = 0$, तो दर्शाइए कि $xyz = -1$. 5

(ख) सिद्ध कीजिए : $3 \sin^{-1} x = \sin^{-1} (3x - 4x^3),\ x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. 5

(ग) यदि $\cos y = x \cos (a + y)$ तथा $\cos a \neq \pm 1$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 (a + y)}{\sin a}$. 5

(घ) दर्शाइए कि बिन्दु $A(2, 3, -4)$, $B(1, -2, 3)$ और $C(3, 8, -11)$ संरेख हैं । 5

(ङ) हल कीजिए : $y\, dx - (x + 2y^2)\, dy = 0$. 5

6. *सभी* खण्ड कीजिए :

(क) यदि रेखाएँ $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$ और $\frac{x-1}{3k} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-5}$ लम्बवत् हों, तो k का मान ज्ञात कीजिए । 5

(ख) एक पासे को दो बार उछाला गया और प्रकट हुई संख्याओं का योगफल 6 पाया गया । संख्या 4 के न्यूनतम एक बार प्रकट होने की सप्रतिबन्ध प्रायिकता ज्ञात कीजिए । 5

(ग) व्यवरोधों $3x + 4y \le 60, x + 3y \le 30, x \ge 0, y \ge 0$ के अन्तर्गत $z = 8000x + 12000y$ का अधिकतमीकरण कीजिए । 5

(घ) माना $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$; तो दर्शाइए कि $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$. 5

(ङ) हल कीजिए : $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$. 5

7. कोई *एक* खण्ड कीजिए :

(क) समीकरण निकाय 8

$$x - y + z = 4$$
$$2x + y - 3z = 0$$
$$x + y + z = 2$$

को आव्यूह विधि से हल कीजिए ।

(ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, तो सत्यापित कीजिए कि $A(\text{adj } A) = |A|I$ और A^{-1} ज्ञात कीजिए । 8

8. कोई *एक* खण्ड कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि एक शंकु के अन्तर्गत महत्तम वक्र पृष्ठ वाले लम्ब-वृत्तीय बेलन की त्रिज्या शंकु की त्रिज्या की आधी होती है । 8

(ख) सिद्ध कीजिए : 8

$$\int_0^{\pi/4} \log_e (1 + \tan x)\, dx = \frac{\pi}{8} \log_e 2.$$

9. कोई **एक** खण्ड कीजिए :

(क) $\int \frac{x^2 + x + 1}{(x+2)(x^2+1)} dx$ का मान ज्ञात कीजिए । *8*

(ख) (i) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । *5*

(ii) यदि $e^y(1+x) = 1$ है, तो दिखाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ होगा । *3*

(English Version)

Instructions :

(i) *First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.*

(ii) *There are in all **nine** questions in this question paper.*

(iii) ***All** questions are compulsory.*

(iv) *In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.*

(v) *Marks allotted to the questions are indicated against them.*

(vi) *Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.*

(vii) *Do not waste your time over a question you cannot solve.*

1. Do ***all*** parts. Select the correct alternative of each part and write it in your answer book.

(a) In the set of real numbers, the relation R defined by $R = \{(a, b) : a \le b^2\}$ is : *1*

(i) not reflexive and symmetric, but transitive

(ii) not reflexive and transitive, but symmetric

(iii) not symmetric and transitive, but reflexive

(iv) not reflexive, not symmetric and not transitive

(b) If $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, then number of functions from A to B will be : *1*

(i) 6 (ii) 8

(iii) 9 (iv) 5

(c) For which value of λ are the vectors $\lambda\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ and $\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ perpendicular ? *1*

(i) -2 (ii) 2

(iii) 3 (iv) 4

(d) The value of the integral $\int x e^{-x} dx$ is : *1*

(i) $-(x+1)e^{-x}$ (ii) $(x+1)e^{-x}$

(iii) $(x-1)e^{-x}$ (iv) $-(x-1)e^{-x}$

(e) The order of the differential equation $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 8y = \log x$ is : *1*

(i) 2 (ii) 3

(iii) 5 (iv) 6

2. Do ***all the*** parts :

(a) Find the principal value of $\operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$. *1*

(b) Find the differential coefficient of $\cos(\sin x^2)$ with respect to x. *1*

(c) Solve : $\frac{dy}{dx} = -4xy^2$. *1*

(d) Integrate $\log_e x$ with respect to x. *1*

(e) If $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ and $P(A \mid B) = \frac{3}{10}$, find $P(A \cup B)$. *1*

3. Do ***all*** the parts :

(a) Find matrix AB if $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$. *2*

(b) Is the function $f(x)$ defined by $f(x) = \begin{cases} x+5, & \text{if } x \le 1 \\ x-5, & \text{if } x > 1 \end{cases}$ is continuous at $x = 1$? *2*

(c) Evaluate : $\int \frac{1}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} dx$. *2*

(d) Find the area of the parallelogram whose adjacent sides are represented by the vectors $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$. *2*

4. Do ***all*** the parts :

(a) A relation R is defined in $N \times N$ as follows :

$(a, b) R (c, d)$ if and only if $ad = bc$. Prove that R is an equivalence relation. 2

(b) Find the least value of 'a' for which the function $f(x) = x^2 + ax + 1$ is increasing on the interval [1, 2]. 2

(c) Solve the differential equation $\dfrac{dy}{dx} + y = 1 \; (y \neq 1)$. 2

(d) A die is thrown once. If E represents the event 'the number obtained on the die is a multiple of 3' and F represents the event 'the number obtained on the die is even', then tell whether the events E and F are independent. 2

Do ***all*** the parts :

(a) If x, y, z are all different and $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3+1 \\ y & y^2 & y^3+1 \\ z & z^2 & z^3+1 \end{vmatrix} = 0$, show that $xyz = -1$. 5

(b) Prove that : $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$, $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$. 5

(c) If $\cos y = x\cos(a + y)$ and $\cos a \neq \pm 1$, prove that $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos^2(a + y)}{\sin a}$. 5

(d) Show that the points $A(2, 3, -4)$, $B(1, -2, 3)$ and $C(3, 8, -11)$ are collinear. 5

(e) Solve : $y\,dx - (x + 2y^2)\,dy = 0$. 5

6. Do ***all*** the parts :

(a) If the lines $\dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y-2}{2k} = \dfrac{z-3}{2}$ and $\dfrac{x-1}{3k} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-6}{-5}$ are perpendicular, find the value of k. 5

(b) A die was thrown twice and it was found that the sum of the numbers that appeared was 6. Find the conditional probability that the number 4 appeared at least once. 5

(c) Maximize $z = 8000x + 12000y$ subject to constraints

$3x + 4y \leq 60,$

$x + 3y \leq 30,$

$x \geq 0, y \geq 0.$ 5

(d) Let $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$; then show that $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$. 5

(e) Solve : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$. 5

7. Do any *one* part :

(a) Solve by matrix method the system of equations : 8

$$x - y + z = 4$$
$$2x + y - 3z = 0$$
$$x + y + z = 2$$

(b) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, then verify that $A(\text{adj}\, A) = |A|\, I$ and find A^{-1}. 8

8. Do any *one* part :

(a) Prove that the radius of the right circular cylinder of maximum curved surface inscribed in a cone is half of the radius of the cone. 8

(b) Prove : 8

$$\int_0^{\pi/4} \log_e (1 + \tan x)\, dx = \frac{\pi}{8} \log_e 2.$$

9. Do any *one* part :

(a) Evaluate : $\displaystyle\int \frac{x^2 + x + 1}{(x+2)(x^2+1)}\, dx$. 8

(b) (i) Find the area of the bounded region of $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. 5

(ii) If $e^y(1 + x) = 1$, then show that $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$. 3